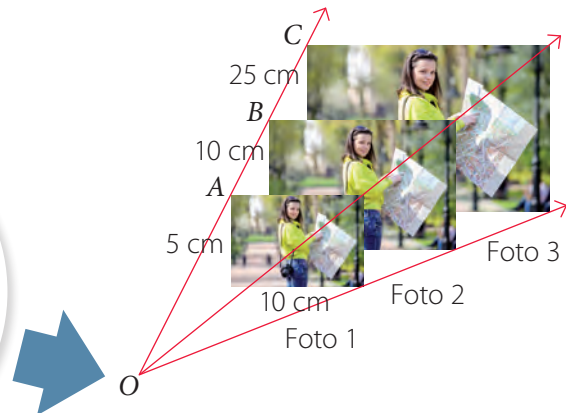



## Recuerdo lo que sé

A circular inset image showing a man in a white shirt taking a photo of a woman in a bright yellow jacket in a park setting. The woman is smiling and looking towards the camera. The background is a blurred park with trees and a path.

- $$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}} \Rightarrow \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} = \boxed{\phantom{000}} \qquad \frac{\text{Ancho}}{\text{Largo}} \Rightarrow \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} = \boxed{\phantom{000}}$$



- 

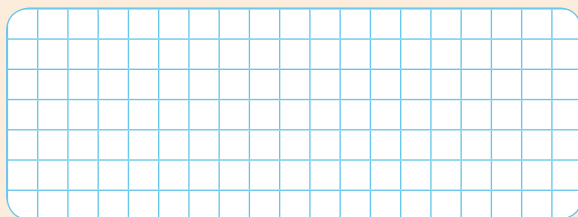
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces:}$$
$$a \cdot d = b \cdot c$$

## Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

- a. Si las medidas de la foto 1 aumentan al doble, ¿se conserva el valor de la razón respecto de las medidas originales? Explica.

Resuelvo



Mi estrategia ► \_\_\_\_\_

---

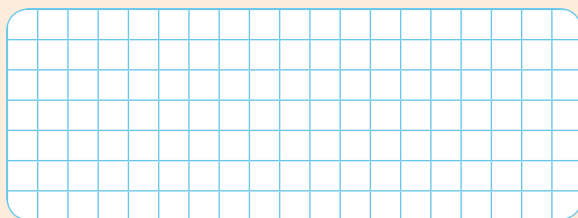
---

---

---

- b. Considerando las medidas de las fotos 1 y 2, obtenidas en la actividad 1. y además que  $m(\overline{OA}) = 6$  cm, ¿cuánto mide la distancia entre  $O$  y  $B$ ? ¿Podrás plantear una estrategia para responder este tipo de problemas? Explica.

Resuelvo



Mi estrategia ► \_\_\_\_\_

---

---

---

---



3. Comenta tus estrategias con un compañero o compañera. Luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

---

---

---

## Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Confiaste en tus capacidades al momento de responder a las preguntas planteadas, incluso cuando no conseguiste una respuesta en forma inmediata? Explica de manera detallada.  
\_\_\_\_\_
- ¿Qué conocimientos de años anteriores utilizaste para desarrollar las actividades?  
\_\_\_\_\_
- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? Explica cómo podrías resolverlas.  
\_\_\_\_\_

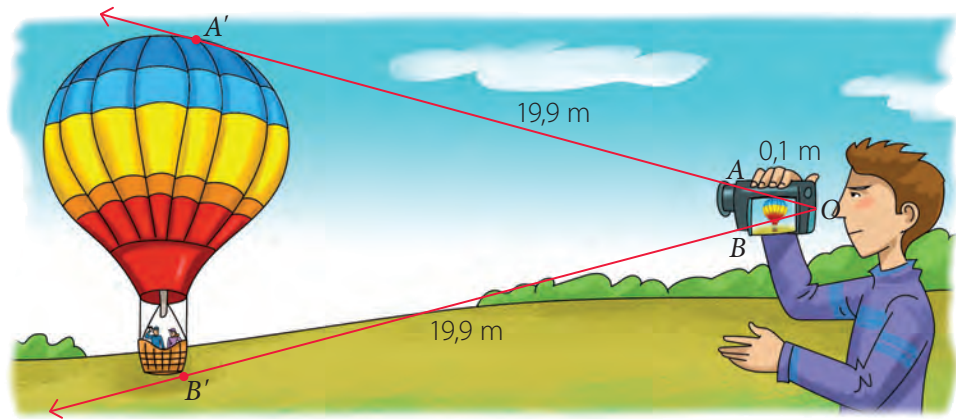


## Homotecia

### Objetivo

- Comprender el concepto de homotecia.

Luciano y Javiera contrataron un tour en un globo aerostático y un amigo de ellos grabó el momento en que suben al globo.



- ¿Qué representa la distancia  $OA'$ ? ¿Y la distancia  $OB'$ ? Explica.

---



---

- Suponiendo que  $\overline{OA}$  y  $\overline{OB}$  tienen la misma medida, completa las siguientes expresiones.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} = \boxed{\phantom{000}}$$

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} = \boxed{\phantom{000}}$$

- ¿Qué relación hay entre los cocientes anteriores? Explica.

---



---

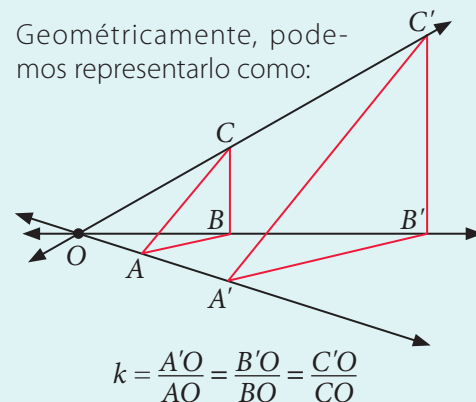
### Conceptos

Una **homotecia** es una transformación geométrica que permite obtener una figura con igual forma a otra.

Dos figuras son **homotéticas** si al unir mediante rectas sus vértices correspondientes estas rectas concurren en un único punto, llamado **centro de homotecia** ( $O$ ).

En una homotecia, la **razón** entre la distancia del centro de homotecia ( $O$ ) al vértice de la figura imagen y la distancia del centro de homotecia ( $O$ ) al vértice de la figura original se llama **razón de homotecia** ( $k$ ).

Geoméricamente, podemos representarlo como:

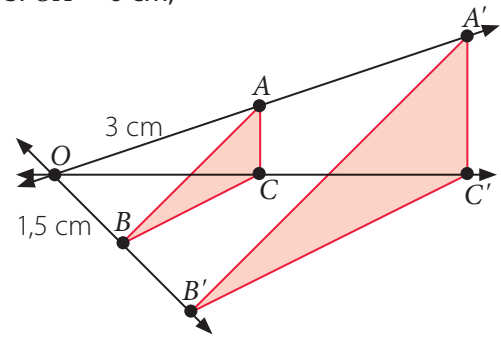


Ejemplo 1

Sobre el triángulo  $ABC$  se realizó una homotecia de centro  $O$ . Si  $OA' = 6$  cm, ¿cuánto mide  $BB'$ ?

- 1 Al plantear la proporción, se tiene:  $\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{B'O}{1,5}$
- 2 Aplicando el teorema fundamental de las proporciones, se tiene:  $6 \cdot 1,5 = 3 \cdot B'O \rightarrow B'O = 3$ .
- 3 Ya que  $OB' = OB + BB'$ , se tiene que:  $3 = 1,5 + BB' \rightarrow BB' = 1,5$ .

**Respuesta:** La medida de  $BB'$  es 1,5 cm.

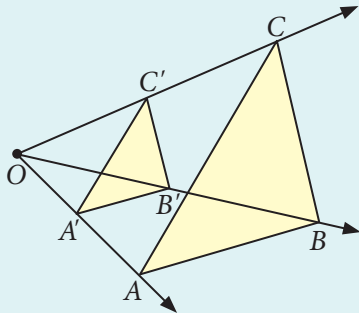


## Conceptos

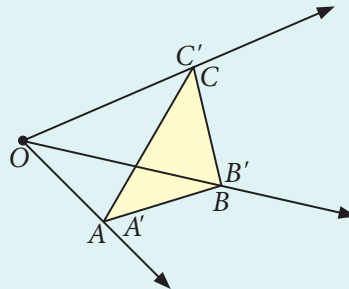
Dependiendo del valor de la razón ( $k \neq 0$ ), se tiene lo siguiente:

1. Si  $k > 0$ , es una **homotecia directa** y se tienen los siguientes casos:

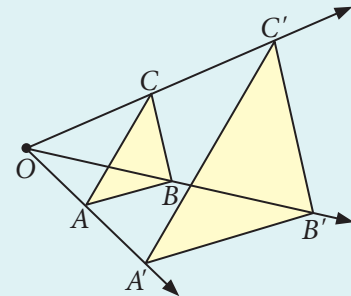
Si  $0 < k < 1$ , la figura resultante es una **reducción** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia ( $O$ ).



Si  $k = 1$ , la figura resultante es **congruente** con la figura original.

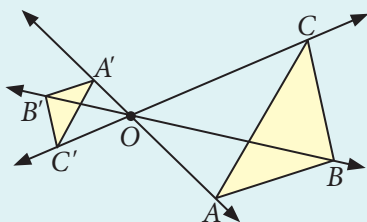


Si  $k > 1$ , la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia ( $O$ ).

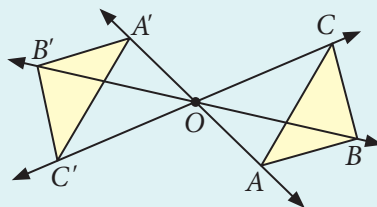


2. Si  $k < 0$ , es una **homotecia inversa** y se tienen los siguientes casos:

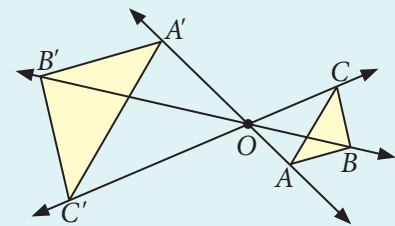
Si  $-1 < k < 0$ , la figura resultante es una **reducción** de la figura original y el centro de homotecia ( $O$ ) está ubicado entre ambas figuras.



Si  $k = -1$ , la figura resultante es **congruente** con la figura original.



Si  $k < -1$ , la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y el centro de homotecia ( $O$ ) está ubicado entre ambas figuras.



Ejemplo 2

Sobre el cuadrilátero  $ADCB$  se realizó una homotecia con centro en  $O$ , resultando el cuadrilátero  $A'D'C'B'$ . ¿Cuánto es el valor de la razón de homotecia?

1 Al calcular el cociente, se tiene:

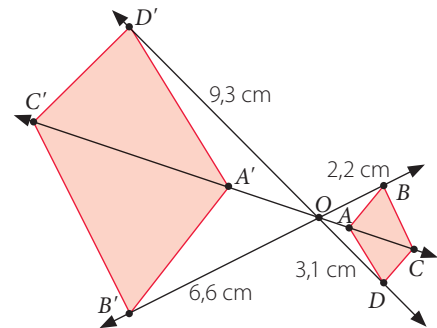
$$k = \frac{OD'}{OD} = \frac{9,3}{3,1} = 3 \text{ y } k = \frac{OB'}{OB} = \frac{6,6}{2,2} = 3$$

PASO A PASO

2 Ya que el centro de la homotecia está entre ambas figuras, la homotecia es inversa y el valor de la razón es negativo.

**Respuesta:** El valor de la razón es  $-3$ .

➤ Si  $OC'$  mide  $8,4$  cm, ¿cómo calcularías la medida de  $OC$ ? Explica.



Ejemplo 3

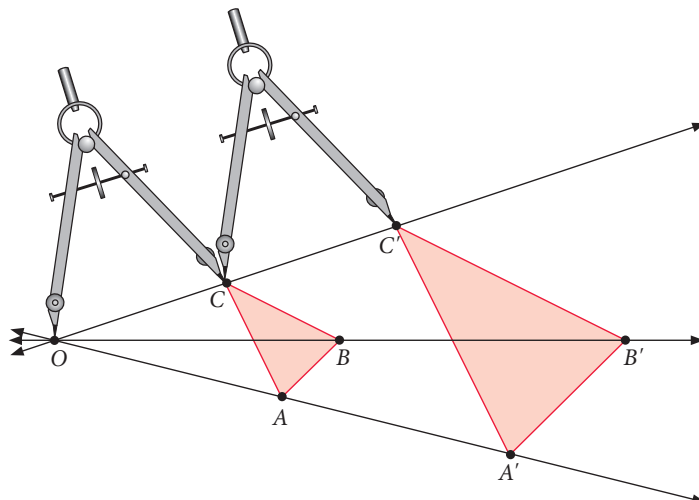
Utiliza regla y compás para explicar cómo puedes realizar una homotecia de razón 2 y centro en  $O$  sobre el triángulo  $ABC$ .

1 Utilizando una regla, trazas desde el centro  $O$  rectas que pasen por cada vértice del triángulo.

PASO A PASO

2 Luego, con el compás con centro en  $O$  y radio  $OC$ , la replicas sobre la misma recta otra vez con centro en  $C$ . Realiza lo mismo con cada uno de los otros vértices.

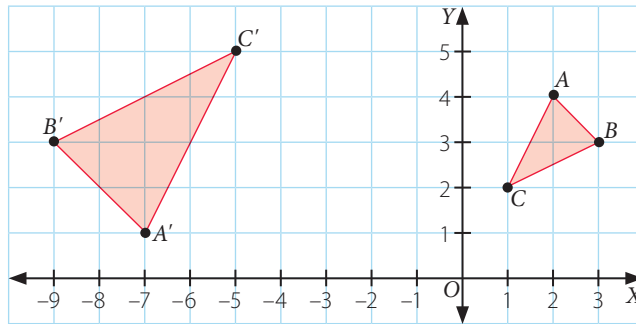
3 Finalmente trazas los segmentos sobre cada figura imagen obteniendo el triángulo  $A'B'C'$  como se muestra a continuación:



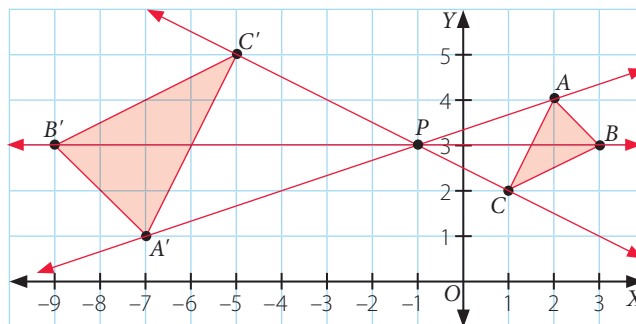
➤ Utilizando un transportador, mide los ángulos internos y utilizando una regla mide los lados de los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ . ¿Qué puedes afirmar respecto de dichas medidas? ¿Es correcto afirmar que el lado  $BC \parallel B'C'$ ? Argumenta tu respuesta.

Ejemplo 4

Al triángulo  $ABC$  se le aplicó una homotecia resultando el triángulo  $A'B'C'$ .  
¿Cuáles son las coordenadas del centro de homotecia  $P$ ?



Para determinar las coordenadas del centro de homotecia se trazan las rectas que van de cada vértice de la figura original a la figura imagen. La intersección de dichas rectas corresponderá al centro de homotecia ( $P$ ).



**Respuesta:** El punto del centro de homotecia es  $P(-1, 3)$ .

➤ En este caso, ¿cómo calcularías el valor de la razón de homotecia? Explica.

Visita la Web

Para saber más sobre homotecia, visita el siguiente sitio web:

<http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/reescala.html>

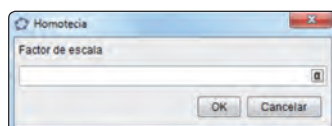


Herramientas tecnológicas

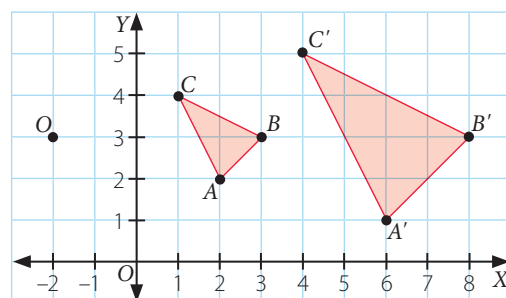
Nota: la aplicación GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)), creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Para construir una homotecia utilizando el *software* GeoGebra, considera lo siguiente:

1. Utilizando el botón construyes el polígono correspondiente.
2. Con el botón ubicas el centro de homotecia.
3. Finalmente, con el botón haz clic en la figura, el centro de homotecia y luego se abrirá esta ventana, que es donde debes ingresar el valor de la razón de homotecia.



Por ejemplo, a continuación se muestra la aplicación de una homotecia al triángulo  $ABC$  de centro  $O(-2, 3)$  y valor de razón de homotecia igual a 2.

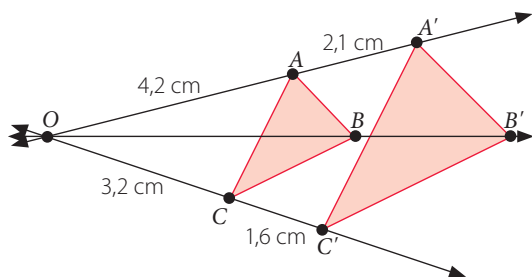


# Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

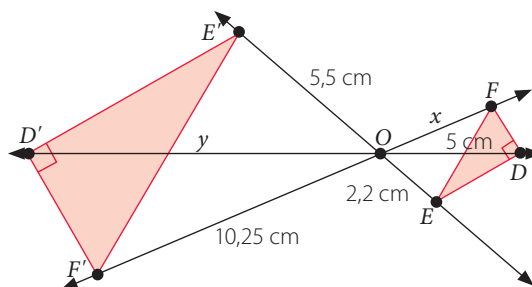
1. Observa cada homotecia que se aplica y luego responde.

a.



- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?
- Si  $OB = 5$  cm, ¿cuánto mide  $BB'$ ?
- Si  $CA = 2,2$  cm, ¿cuánto mide  $C'A'$ ?
- Si  $m(\angle ABC) = 72^\circ$ , ¿cuánto es la  $m(\angle A'B'C')$ ?

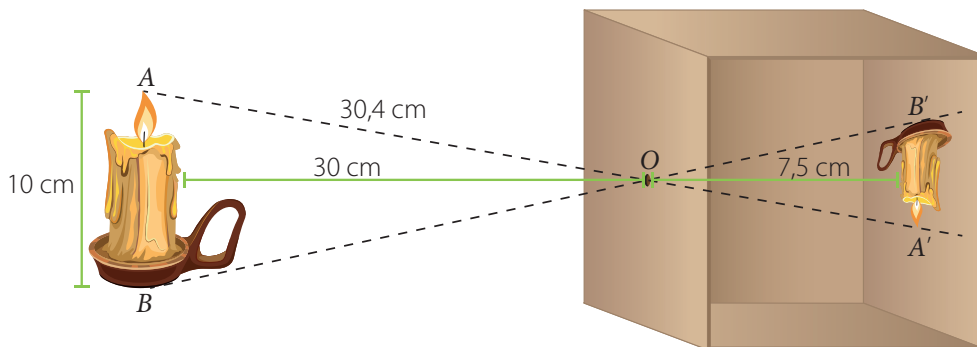
b.



- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?
- ¿Cuánto es  $x + y$ ?
- Si  $FE = 2,5$  cm,  $ED = 2$  cm y  $DF = 1,5$  cm, ¿cuál es el perímetro del  $\triangle E'D'F'$ ?
- Si  $m(\angle D'E'F') = 20^\circ$ , ¿cuánto es la  $m(\angle EFD)$ ?

c. En la homotecia realizada en a. y en b., ¿qué puedes concluir respecto de sus ángulos internos?  
¿Corresponden a una homotecia directa o inversa? Explica.

2. **Ciencias** Una cámara oscura es un instrumento que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real utilizando principios de la óptica.



- ¿Cuál es la clasificación de la homotecia?
- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?
- ¿Cuánto es la medida de la proyección de la vela en la cámara oscura ( $B'A'$ )?
- Si  $OB = OA$ , ¿cuál es el perímetro del triángulo  $OA'B'$ ?

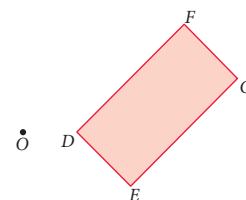
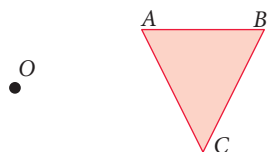
3. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

- ☐ Si el valor de razón de una homotecia cumple que  $|k| > 1$ , se tiene una reducción.
- ☐ Si el valor de razón de una homotecia cumple que  $k > 0$ , es una homotecia directa.

4. Utilizando regla y compás construye cada homotecia de centro  $O$  y valor de razón  $k$ .

a.  $k = 2$

b.  $k = -1$

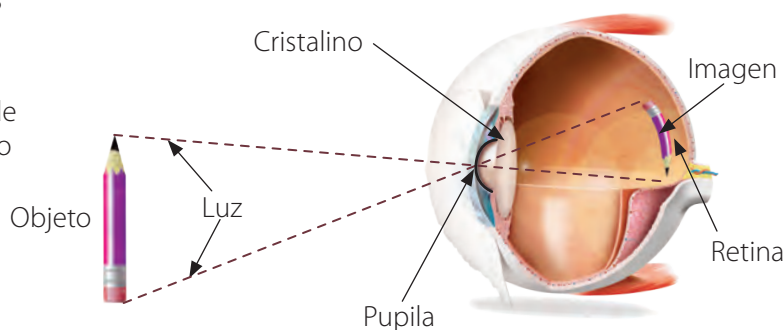


5. **Biología** En el proceso de la visión, la luz reflejada por los objetos ingresa a nuestro ojo por la pupila y se proyecta en la retina, la cual contiene receptores visuales, que son los encargados de transmitir la información al cerebro. El ojo humano tiene forma parecida a una esfera y tiene un radio promedio aproximado de 2,5 cm.

a. ¿Cuál es el centro de la homotecia?  
¿Cómo lo supiste? Explica.

b. En este caso, ¿el valor de la razón de homotecia es un número positivo o negativo? Argumenta.

c. Si se observa un lápiz que mide 10 cm de altura a 20 cm de distancia, ¿cuál será el largo de la imagen proyectada en la retina?



6. **Artes visuales** El punto de fuga es el lugar geométrico que corresponde al punto donde las rectas paralelas se juntan (convergen) de acuerdo a la perspectiva que se tenga.

a. En la imagen, ¿qué elementos relacionas con segmentos que son paralelos? Explica.

b. Realiza en tu cuaderno el dibujo que se muestra y explica cuál es el punto de fuga.



## Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cómo explicarías con tus palabras el concepto de homotecia?
- ¿Demostraste confianza en tus capacidades para resolver los problemas? Explica de manera detallada.

## Homotecia de forma vectorial

### Objetivo

- Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.

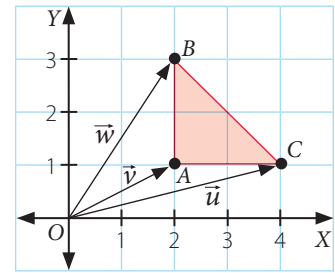
En el plano cartesiano se ha representado el triángulo  $ACB$  con los vectores  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ , respectivamente, que van desde el origen ( $O$ ) a cada uno de los vértices del triángulo.

Al multiplicar por 2 el vector  $\vec{u} = (4, 1)$ , se tiene:

$$2 \cdot \vec{u} = (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (8, 2)$$

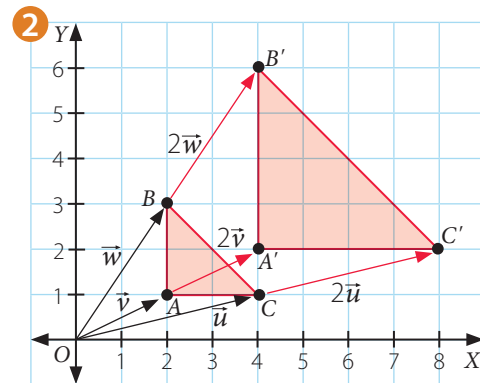
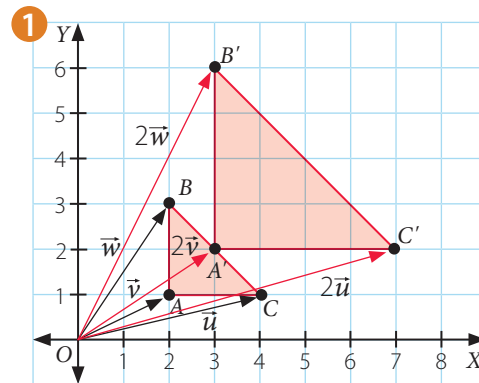
- Multiplica los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  por 2.

$$2 \cdot \vec{v} = \boxed{\phantom{000000}} \quad 2 \cdot \vec{w} = \boxed{\phantom{000000}}$$



### Actitud

Al momento de resolver un desafío confía en tus capacidades, aun cuando no consigas un resultado inmediato.



### Conceptos

En el plano cartesiano, un **vector** se puede representar como un segmento de recta orientado, determinado por dos puntos: un origen y un extremo. De esta manera, un vector se caracteriza por su longitud, dirección y sentido.

Al **multiplicar** un vector  $\vec{w}$  por un **escalar**  $\alpha$  se obtiene otro vector, que corresponde al **vector ponderado** de  $\vec{w}$ . Si  $\vec{w} = (x, y)$ , al multiplicar por  $\alpha$  obtienes:

$$\alpha \cdot \vec{w} = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = (\alpha x, \alpha y)$$

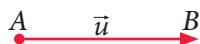
Un vector ponderado cumple con lo siguiente:

- Mantiene la dirección del vector.
- Si  $\alpha = 0$ , se obtiene el vector nulo, es decir,  $0 \cdot \vec{w} = 0 \cdot (x, y) = (0 \cdot x, 0 \cdot y) = (0, 0)$ .
- Si  $\alpha < 0$ , el vector cambia de sentido.
- Si  $\alpha > 0$ , el vector mantiene el sentido.

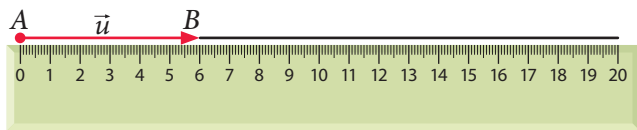


Ejemplo 1

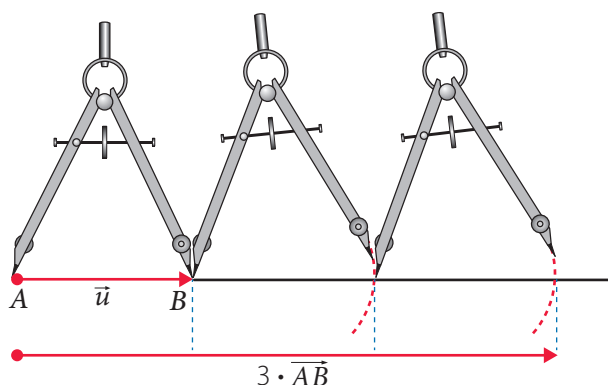
Construye el vector  $3 \cdot \overrightarrow{AB}$  utilizando la regla y luego el compás.



- Como se multiplicará por un escalar mayor que 0, el vector ponderado mantiene la dirección y sentido, por lo que con una regla trazas un segmento de línea en el sentido del vector.



- Al utilizar un compás con centro en  $A$  y radio  $\overline{AB}$  y, a partir de  $B$ , replicas la amplitud del vector  $\overrightarrow{AB}$ , obtendrás el vector  $3\overrightarrow{AB}$ , como se muestra a continuación.



- ¿Qué diferencias aprecias entre el vector  $\overrightarrow{AB}$  y el vector  $3 \cdot \overrightarrow{AB}$ ? ¿Cómo representarías utilizando regla y compás el vector  $0,5 \cdot \overrightarrow{AB}$ ? Explica.

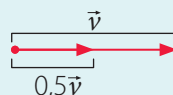
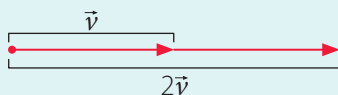
## Habilidad

Al explicar tus soluciones y los procedimientos que utilizaste estás desarrollando la habilidad de **argumentar y comunicar**.

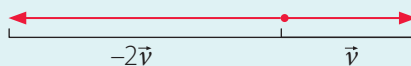
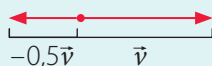
## Conceptos

Al aplicar una **homotecia de centro  $O$**  tal que el valor de la razón  $k$  sea distinto de cero ( $k \neq 0$ ), a un vector  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ , se obtiene lo siguiente:

- Si  $k > 0$ , el sentido del vector no cambia.



- Si  $k < 0$ , el sentido del vector se invierte.

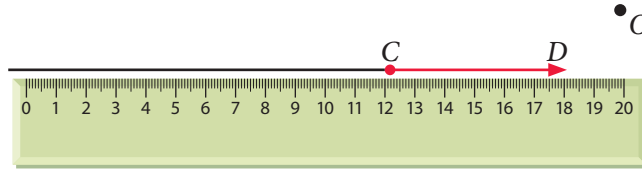




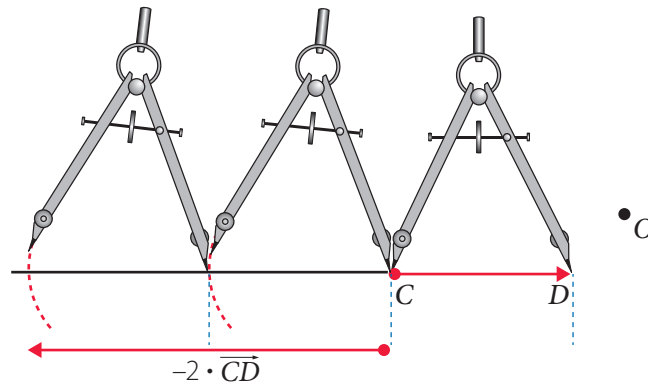
Ejemplo 2

Se marcó el centro de homotecia  $O$  y un vector  $\overrightarrow{CD}$ . A partir de esto construye el vector  $-2\overrightarrow{CD}$  utilizando regla y compás.

- Como el escalar es  $-2$ , al aplicar la homotecia el sentido del vector cambiará, luego utilizando una regla trazas un segmento de línea en sentido contrario al vector.



- Luego utilizando un compás con centro en  $C$  y radio  $\overrightarrow{CD}$ , a partir de  $C$  replicas la amplitud del vector  $\overrightarrow{CD}$ , para obtener el vector solicitado como se muestra a continuación:



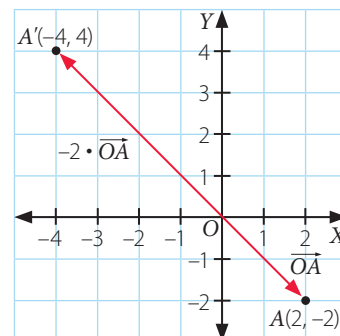
➤ ¿Qué ocurre si el centro de homotecia se cambia? Explica.

Ejemplo 3

Si al punto  $A(2, -2)$  se le aplica una homotecia de centro  $O(0, 0)$ , tal que el valor de la razón  $k$  es  $-2$ , ¿cuáles son las coordenadas del punto que resulta luego de aplicada la homotecia?

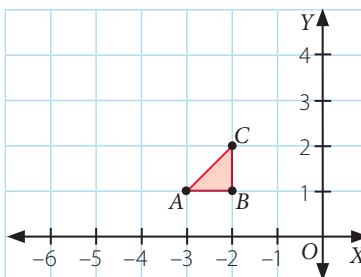
Una manera de resolverlo es trazar el vector que va desde el origen  $O(0, 0)$  hasta el punto  $A(2, -2)$ , y luego multiplicar por el valor de la razón  $k$ , es decir:  $k \cdot \overrightarrow{OA} = -2(2, -2) = (-4, 4)$ , de donde se deduce que el punto imagen es  $A'(-4, 4)$ .

Gráficamente, se tiene:

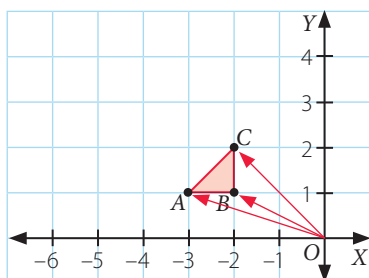


Ejemplo 4

En el plano cartesiano se representa el triángulo  $ABC$ . Si se le aplica una homotecia de centro  $O(0, 0)$  y el valor de la razón de homotecia  $k$  es 2, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura que resulta?



- 1 Se trazan los vectores que van desde el origen a cada uno de los vértices, luego se multiplica cada uno de los vectores por el escalar  $k$ , es decir:



$$k \cdot \overrightarrow{OC} \rightarrow (2 \cdot -2, 2 \cdot 2) = (-4, 4)$$

$$k \cdot \overrightarrow{OB} \rightarrow (2 \cdot -2, 2 \cdot 1) = (-4, 2)$$

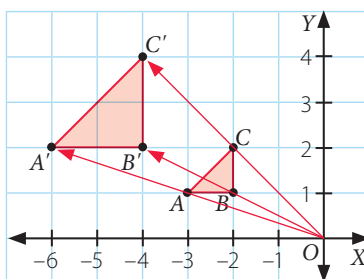
$$k \cdot \overrightarrow{OA} \rightarrow (2 \cdot -3, 2 \cdot 1) = (-6, 2)$$

- 2 Al trazar los vectores, se tiene que los vértices de la figura que resulta son:

$$A'(-6, 2)$$

$$B'(-4, 2)$$

$$C'(-4, 4)$$






- ⊕ ¿Cómo lo resolverías si el centro de homotecia no estuviera en el origen? Explica.

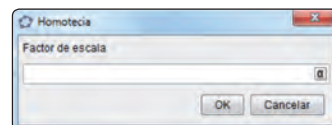


## Herramientas tecnológicas

Nota: la aplicación GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)), creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Para construir una homotecia utilizando el *software* GeoGebra, considera lo siguiente:

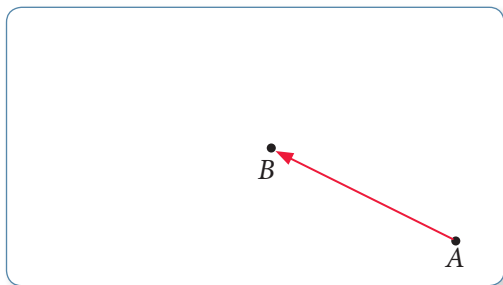
1. Utilizando el botón  construyes el polígono correspondiente.
2. Con el botón  ubicas el centro de homotecia.
3. Finalmente, con el botón  haz clic en la figura, el centro de homotecia y luego se abrirá esta ventana, que es donde debes ingresar el valor de la razón de homotecia.



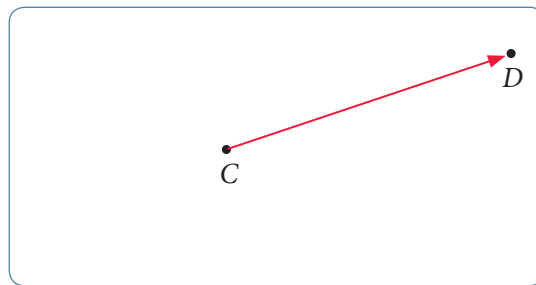
Utilizando el *software* GeoGebra, construye un cuadrilátero de vértices  $A(-2, 4)$ ,  $B(-4, 4)$ ,  $C(-5, 1)$  y  $D(-1, 1)$  y luego aplica una homotecia de  $O(1, -1)$  y valor de la razón  $k = -0,5$ . ¿Cuáles son las coordenadas homotéticas de cada vértice?

1. Construye utilizando regla y compás cada vector. Luego explica la construcción.

a. Se representa el vector  $\overrightarrow{AB}$ . Construye el vector  $2 \cdot \overrightarrow{AB}$ .

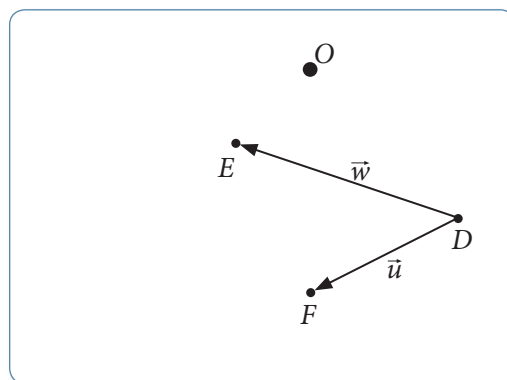


b. Se representa el vector  $\overrightarrow{CD}$ . Construye el vector  $-0,5 \cdot \overrightarrow{CD}$ .

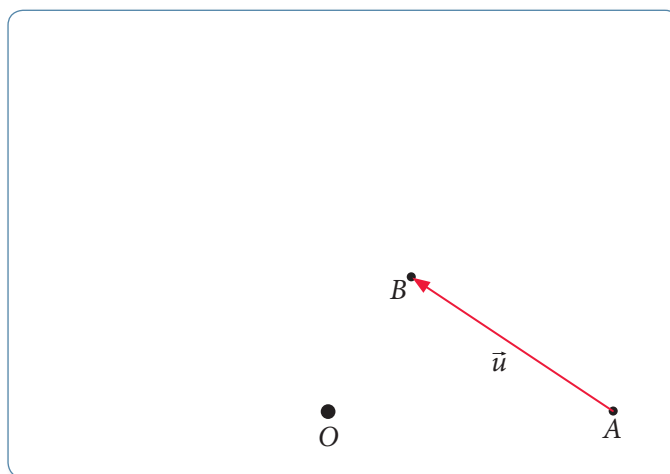


2. En la imagen se representan los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ , y los puntos  $D, E$  y  $F$ .

- Representa los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  utilizando los puntos  $E, D$  y  $F$ .
- Realiza una homotecia de centro  $O$  y valor de razón  $k$  igual a 2.
- Explica una conclusión al comparar las imágenes  $\vec{u}'$  y  $\vec{w}'$  respecto de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$ .

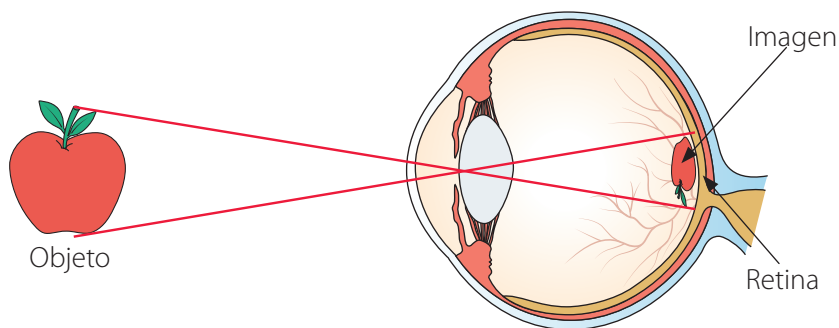


3. Se representó el vector  $\vec{u}$  y los puntos  $A$  y  $B$ . Además, el punto  $O$  corresponde al centro de una homotecia.

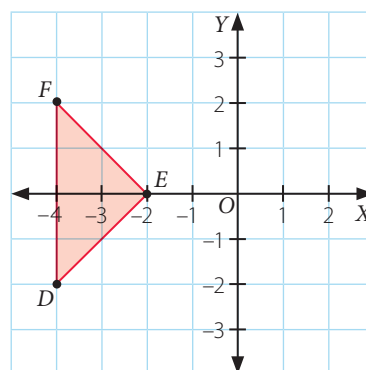
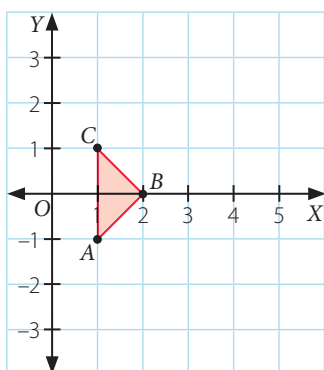


- Realiza una homotecia de centro  $O$  y valor de razón  $k = 2$ .
- Realiza sobre la imagen  $\vec{u}'$  otra homotecia con el mismo centro y valor de razón  $k = 0,5$ .
- Compara la imagen  $\vec{u}''$  de la segunda homotecia con la preimagen original  $\vec{u}$ . ¿Qué regularidad aprecias? Explica.

4. **Ciencias** A continuación se muestra un dibujo esquemático del ojo humano, donde se marcan dos segmentos de rectas en color rojo que representan una homotecia.



- ¿Cuál es el signo del valor de la razón de homotecia que se muestra? Explica.
  - Suponiendo que se ve una manzana a una distancia de 10 m, que tiene una altura de 10 cm y considerando que la retina del ojo se encuentra a una distancia aproximada de 25 mm, ¿cuál es la altura de la imagen que se generaría en la retina?
5. Aplica una homotecia a cada figura geométrica. Para ello, considera que el valor de la razón es  $k$ .
- Centro de homotecia  $O$ ,  $k = 2,5$ .
  - Centro de homotecia  $O$ ,  $k = -0,5$ .



6. Resuelve el siguiente problema.

A un triángulo de vértices  $A(-2, 4)$ ,  $B(-4, 6)$  y  $C(-4, 2)$  se le aplica una homotecia de centro  $O$  y valor de razón  $k$ , obteniéndose como imagen otro triángulo de vértices  $A'(4, 4)$ ,  $B'(8, 0)$  y  $C'(8, 8)$ .

- ¿Cuáles son las coordenadas del centro  $O$ ?
- ¿Cuál es el valor de razón de homotecia?



## Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras el concepto de vector ponderado.
- ¿De qué manera el estudio de vectores pueden ayudarte en problemas relacionados con Ciencias? Explica.